30　指数・対数の計算

257

$2^x=t$ とおくと，$t^2-\frac{1}{t}=2$ より，$\frac{t^3-2t-1}{t}=0$　$\therefore \frac{(t+1)(t^2-t-1)}{t}=0$

$t>0$ より，t は $t^2-t-1=0$ の正の解すなわち $t=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

よって，

$2^x-2^{-x}=t-\frac{1}{t}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{2}{\sqrt{5}+1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{\sqrt{5}-1}{2}=1$　・・・(答)

$2^x+2^{-x}=t+\frac{1}{t}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\sqrt{5}$　・・・(答)

$4^x+4^{-x}=t^2+\frac{1}{t^2}=\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2=3$　・・・(答)

$2^x-4^{-x}=t-\frac{1}{t^2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2=-1+\sqrt{5}$　・・・(答)

補足

$t>0$ より，$\frac{t^2-t-1}{t}=0$　$\therefore t-\frac{1}{t}=1$

これを使って各値を求めることもできる。

258

$2^x=6^{\frac{1}{4}}$ より，$x=\frac{1}{4}\log_2 6=\frac{1}{4\log_6 2}$　$\therefore \frac{1}{x}=4\log_6 2$

同様にして，$\frac{1}{y}=4\log_6 3$，$\frac{1}{z}=4\log_6 24$

よって，

$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=4\log_6 2+4\log_6 3=4\log_6(2\cdot 3)=4$　・・・(答)

$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=4\log_6 2-4\log_6 3-4\log_6 24=4\log_6\left(\frac{2}{3\cdot 24}\right)=4\log_6 6^{-2}=-8$　・・・(答)

259

与式より，$\log_{10}(a+2b)^2=\log_{10}10ab$

よって，$(a+2b)^2=10ab$　すなわち $a^2-6ab+4b^2=0$

これより，$b^2\left\{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2-6\cdot\dfrac{a}{b}+4\right\}=0$

これと，$\dfrac{a}{b}>1$ より，$\dfrac{a}{b}=3+\sqrt{5}$　・・・(答)

$$
\begin{aligned}
\frac{a^2}{a^2+2b^2}&=\frac{\dfrac{a^2}{b^2}}{\dfrac{a^2+2b^2}{b^2}}\\
&=\frac{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2+2}\\
&=\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)^2}{\left(3+\sqrt{5}\right)^2+2}\\
&=\frac{7+3\sqrt{5}}{8+3\sqrt{5}}\\
&=\frac{\left(7+3\sqrt{5}\right)\left(8-3\sqrt{5}\right)}{\left(8+3\sqrt{5}\right)\left(8-3\sqrt{5}\right)}\\
&=\frac{11+3\sqrt{5}}{19}
\end{aligned}
$$
・・・(答)

260

条件より，$\log_b \frac{1}{5} > \log_b a = \frac{1}{\log_a b} > \log_b \frac{4}{5} = \frac{1}{\log_{\frac{4}{5}} b} > 1$

よって，$\log_b \frac{1}{5} > \log_b \frac{4}{5} > 1 > \log_{\frac{4}{5}} b > \log_a b$

ゆえに，最小であるものは$\log_a b$，最大であるものは$\log_b \frac{1}{5}$

261

ア

N 桁の数とすると，$10^{N-1} \leq 3^{2014} < 10^N$ より，$N-1 \leq 2014\log_{10} 3 < N$

$\therefore 2014\log_{10} 3 < n \leq 2014\log_{10} 3 + 1$

$2014\log_{10} 3 = 2014 \cdot 0.47712 = 960.91968$ を代入し，整数 N を求めると，$N = 961$

イ

最も大きい位の数を m とすると，3^{2014} の桁数は 961 だから，

$m \times 10^{960} \leq 3^{2014} < (m+1) \times 10^{960}$ より，$960 + \log_{10} m \leq 2014\log_{10} 3 < 960 + \log_{10}(m+1)$

$2014\log_{10} 3 = 960.91968$ より，$\log_{10} m \leq 0.91968 < \log_{10}(m+1)$

これと，

$\log_{10} 8 = 3\log_{10} 2 = 3 \cdot 0.30103 = 0.90309 < 0.91968$

$\log_{10} 9 = 2\log_{10} 3 = 2 \cdot 0.47712 = 0.95424 > 0.91968$ より，$m = 8$

ウ

3^n の一の位の数を $f(n)$ とすると，

$f(0)=1,\ f(1)=3,\ f(2)=9,\ f(3)=7,\ f(4)=1,\ f(5)=3,\ \cdots$ より，$f(n)$ は周期 4 の関数である。

したがって，k を負でない整数とすると，

$f(4k)=1,\ f(4k+1)=3,\ f(4k+2)=9,\ f(4k+3)=7$

よって，$f(2014) = f(4 \cdot 503 + 2) = 9$

ゆえに，3^{2014} の一の位の数は 9

262

桁数を N とおくと，$10^{N-1} \leq 7^{29} < 10^N$ より，$N-1 \leq 29\log_{10} 7 < N$

$\therefore 29\log_{10} 7 < N \leq 29\log_{10} 7 + 1$ ・・・①

$10^{84} \leq 7^{100} < 10^{85}$ より，$84 \leq 100\log_{10} 7 < 85$ $\therefore 0.84 \leq \log_{10} 7 < 0.85$

これより，$24.36 \leq 29\log_{10} 7 < 24.65$

これと①より，$24.36 \leq N \leq 25.65$ $\therefore N = 25$

ゆえに，求める桁数は 25

263

(1)

解法 1

$a=1$ のとき

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=1,\quad \frac{1}{2}\{f(x)+f(y)\}=\frac{1}{2}(1+1)=1 \qquad \therefore f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{1}{2}\{f(x)+f(y)\}$$

$0<a<1,\ 1<a$ のとき

$$\frac{1}{2}\{f(x)+f(y)\}=\frac{1}{2}\left(\frac{a^x+a^{-x}}{2}+\frac{a^y+a^{-y}}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(a^x+a^y\right)+\frac{1}{4}\left(a^{-x}+a^{-y}\right)$$

ここで,

$a^x>0,\ a^y>0$ だから，相加相乗平均により,

$$a^x+a^y\geq 2\sqrt{a^xa^y}=2a^{\frac{x+y}{2}}$$ （等号は $a^x=a^y$ すなわち $x=y$ のとき成立）

$$a^{-x}+a^{-y}\geq 2\sqrt{a^{-x}a^{-y}}=2a^{-\frac{x+y}{2}}$$ （等号は $a^{-x}=a^{-y}$ すなわち $x=y$ のとき成立）

よって,

$$\frac{1}{2}\{f(x)+f(y)\}=\frac{1}{4}\left(a^x+a^y\right)+\frac{1}{4}\left(a^{-x}+a^{-y}\right)$$
$$\geq\frac{1}{4}\cdot 2a^{\frac{x+y}{2}}+\frac{1}{4}\cdot 2a^{-\frac{x+y}{2}}$$
$$=\frac{a^{\frac{x+y}{2}}+a^{-\frac{x+y}{2}}}{2}$$
$$=f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

等号は $x=y$ のとき成立

以上より,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq\frac{1}{2}\{f(x)+f(y)\}$$ （等号は $a=1$ または $x=y$ のとき成立）

解法 2

$$\frac{1}{2}\{f(x)+f(y)\}-f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{1}{4}\left(a^{x}+a^{-x}+a^{y}+a^{-y}\right)-\frac{1}{2}\left(a^{\frac{x+y}{2}}+a^{-\frac{x+y}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\left(a^{x}-2a^{\frac{x+y}{2}}+a^{y}\right)+\left(a^{-x}-2a^{-\frac{x+y}{2}}+a^{-y}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\left(a^{\frac{x}{2}}+a^{\frac{y}{2}}\right)^{2}+\left(a^{-\frac{x}{2}}+a^{-\frac{y}{2}}\right)^{2}\right\}\geq 0$$

より，$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq\frac{1}{2}\{f(x)+f(y)\}$（等号は $a=1$ または $x=y$ のとき成立）

(2)

$\frac{\log_a(x+y)}{2}=\log_a(x+y)^{\frac{1}{2}}$，$\frac{\log_a x+\log_a y}{2}=\log_a(xy)^{\frac{1}{2}}$ より，

与式の対数の真数は，それぞれ $\frac{x+y}{2}$, $(x+y)^{\frac{1}{2}}$, $(xy)^{\frac{1}{2}}$ である。

真数は正だから，これらの大小関係を，各々を 2 乗したもの，

すなわち $\left(\frac{x+y}{2}\right)^{2}$, $x+y$, xy で調べると，

$\left(\frac{x+y}{2}\right)^{2}-xy=\frac{1}{4}\left(x^{2}-2xy+y^{2}\right)=\frac{1}{4}(x-y)^{2}\geq 0$（等号成立は $x=y$ のとき）

$xy-(x+y)=(x-1)(y-1)-1>0$（$\because x-1>1,\ y-1>1$）

より，$\left(\frac{x+y}{2}\right)^{2}\geq xy>x+y$

よって，真数の大小関係は $\frac{x+y}{2}\geq(xy)^{\frac{1}{2}}>(x+y)^{\frac{1}{2}}$

ゆえに，

$0<a<1$ のとき

$$\log_a\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq\frac{\log_a x+\log_a y}{2}<\frac{\log_a(x+y)}{2}$$

$1<a$ のとき

$$\log_a\left(\frac{x+y}{2}\right)\geq\frac{\log_a x+\log_a y}{2}>\frac{\log_a(x+y)}{2}$$

264

$\left(\dfrac{5}{4}\right)^n=\left(\dfrac{10}{2^3}\right)^n$ より，$2^{10}<\left(\dfrac{10}{2^3}\right)^n<2^{20}$ $\quad\therefore 10\log_{10}2<n(1-3\log_{10}2)<20\log_{10}2$

両辺を $1-3\log_{10}2$ で割ることにより，$10\cdot\dfrac{\log_{10}2}{1-3\log_{10}2}<n<20\cdot\dfrac{\log_{10}2}{1-3\log_{10}2}$

これと，$\dfrac{\log_{10}2}{1-3\log_{10}2}=\dfrac{-\frac{1}{3}(1-3\log_{10}2)+\frac{1}{3}}{1-3\log_{10}2}=-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3(1-3\log_{10}2)}$ より，

$\dfrac{10}{3}\left(-1+\dfrac{1}{1-3\log_{10}2}\right)<n<\dfrac{20}{3}\left(-1+\dfrac{1}{1-3\log_{10}2}\right)$ $\quad$ ・・・①

ここで，$-1+\dfrac{1}{1-3\log_{10}2}$ がとる値の範囲を調べると，

$-0.9033<-3\log_{10}2<-0.903$ より，$1+(-0.9033)<1+(-3\log_{10}2)<1+(-0.903)$

すなわち $0.0967<1-3\log_{10}2<0.097$

よって，$\dfrac{1}{0.097}<\dfrac{1}{1-3\log_{10}2}<\dfrac{1}{0.0967}$ より，$-1+\dfrac{1}{0.097}<-1+\dfrac{1}{1-3\log_{10}2}<-1+\dfrac{1}{0.0967}$

すなわち $\dfrac{0.903}{0.097}<-1+\dfrac{1}{1-3\log_{10}2}<\dfrac{0.9033}{0.0967}$

よって，①において，

$\dfrac{3.01}{0.097}<\dfrac{10}{3}\left(-1+\dfrac{1}{1-3\log_{10}2}\right)<\dfrac{3.011}{0.0967}$ より，$31.0<\dfrac{10}{3}\left(-1+\dfrac{1}{1-3\log_{10}2}\right)<31.2$

また，これより $62.0<\dfrac{20}{3}\left(-1+\dfrac{1}{1-3\log_{10}2}\right)<62.4$

したがって，①を満たす自然数 n の値の範囲は $32\leq n\leq 62$

ゆえに，その数は31個

265

(1)

$\log_2 3$ が有理数であると仮定すると，

$\log_2 3 = \dfrac{q}{p}$ （p と q は互いに素な自然数）と表せる。

よって，$3 = 2^{\frac{q}{p}}$ より，$3^p = 2^q$

ところが，3^p は奇数，2^q は偶数だから，$3^p \neq 2^q$ である。

よって，矛盾

ゆえに，$\log_2 3$ は有理数ではない。すなわち無理数である。

(2)

(i) $n=1$ のとき

$\log_2 1 = 0$ より，$\log_2 n$ は整数である。

(ii) n が 2 以上の整数のとき

$\log_2 n = \dfrac{s}{r}$ （r と s は互いに素な自然数）とおくと，$n = 2^{\frac{s}{r}}$ より，$n^r = 2^s$

これは，n^r は 2^s に素因数分解されることを示している。

よって，$n = 2^k \left(k = \dfrac{s}{r}\right)$ より，$r=1$

ゆえに，$\log_2 n = s$ 　すなわち $\log_2 n$ は整数である。

(i)，(ii)より，$\log_2 n$ が整数でない有理数となることはない。

266

(1)

$\log_2 6 = m + \dfrac{1}{n+a}$ より，$6 = 2^{m+\frac{1}{n+a}}$ 　・・・①

$2^5 < 6^2 < 2^6$ より，$2^{\frac{5}{2}} < 6 < 2^3$ 　・・・②

①，②より，$\dfrac{5}{2} < m + \dfrac{1}{n+a} < 3$ 　・・・③

これと $0 < \dfrac{1}{n+a} < 1$ より，$m=2$ 　・・・④

よって，③，④より，$\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{n+a} < 1$ 　すなわち，$1 < n+a < 2$

ゆえに，$0 < a < 1$ より，$n=1$

以上より，$m=2,\ n=1$

(2)

解法 1

$\log_2 6 = 2 + \dfrac{1}{1+a}$， $\log_2 6 = 1 + \log_2 3$ より， $\log_2 3 = 1 + \dfrac{1}{1+a}$

$a > \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow 1 + a > \dfrac{5}{3}$ より， $1 + \dfrac{1}{1+a} < 1 + \dfrac{3}{5} = \dfrac{8}{5}$

よって， $\dfrac{8}{5} > \log_2 3$ を示せばよい。

$\dfrac{8}{5} - \log_2 3 = \dfrac{1}{5}(8 - 5\log_2 3) = \dfrac{1}{5}(\log_2 2^8 - \log_2 3^5) = \dfrac{1}{5}\log_2 \dfrac{256}{243} > 0$ より， $\dfrac{8}{5} > \log_2 3$

よって， $a > \dfrac{2}{3}$

解法 2

$\log_2 3 = 1 + \dfrac{1}{1+a}$ より， $3 = 2^{1+\frac{1}{1+a}}$

$a > \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow 1 + a > \dfrac{5}{3}$ より， $1 + \dfrac{1}{1+a} < 1 + \dfrac{3}{5} = \dfrac{8}{5}$

よって， $3 < 2^{\frac{8}{5}}$ を示せばよい。

$3^5 = 243$， $\left(2^{\frac{8}{5}}\right)^5 = 2^8 = 256$ より， $3^5 < 2^8$ $\quad \therefore 3 < 2^{\frac{8}{5}}$

ゆえに， $a > \dfrac{2}{3}$